1	2	3	4
B	B	B=	B B

Bien parcial!

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE: MAIL:
LIBRETA: TURNO: 14 a 17 19 a 22 TEMA 1

Algebra Lineal - 1er Cuatrimestre 2016
2do Parcial (05/07/2016)

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida en la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ por

$$f(v_1) = (3, -3, 0), \quad f(v_2) = (2, 0, 3) \ \text{ y } \ f(v_3) = (1, 2, 3).$$

Hallar $\det(f^2)$ sabiendo que $\det(v_1 | v_2 - v_3 | 2v_3 - v_2) = 9$.

2. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita n. Para cada $v \in V$ se define $\phi_v \in V^*$ como el funcional lineal que satisface $\phi_v(w) = \langle w, v\rangle$ para todo $w \in V$.

   (a) Probar que si $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ es una base de V tal que su base dual es $\mathcal{B}^* = (\phi_{v_1}, \ldots, \phi_{v_n})$, entonces $\mathcal{B}$ es ortonormal.

   (b) Dada $g \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$, se define $\hat{g} : V \longrightarrow V^*$ como $\hat{g}(v) = \phi_v \circ g$. Probar que $\hat{g}(v) = \phi_{g^*(v)}$, para todo $v \in V$.

3. Hallar una transformación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, -1, 2) = (0, 3, 0)$ y $\lambda = -1$ sea un autovalor de f.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hallar:

   (a) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, la forma de Jordan de A.

   (b) Para $a = 1, b = 0$, una base de Jordan de A.

JUSTIFICAR TODAS LAS RESPUESTAS

1/4

1_ Dado $v \in \mathbb{R}^3$, $f(v) = \left(f(v_1) \middle| f(v_2) \middle| f(v_3) \right) \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow \left(f(v_1) \middle| f(v_2) \middle| f(v_3) \right) = C(\mathcal{B},\mathcal{E}) \cdot [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$= [f]_{BE}$

$\Rightarrow \det\left(C(\mathcal{B},\mathcal{E}) \cdot [f]_{\mathcal{B}} \right) = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} - (-3) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-6) + 3 \cdot 3 = -9$

Sabemos que $\det(f^2) = \det(f \circ f) = \det(f)^2 = \det([f]_{\mathcal{B}})^2$

y $\det\left(C(\mathcal{B},\mathcal{E}) \cdot [f]_{\mathcal{B}} \right) = \det\left(C(\mathcal{B},\mathcal{E}) \right) \cdot \det([f]_{\mathcal{B}}) = -9$

así que queremos averiguar $\det(C(\mathcal{B},\mathcal{E}))$, pero

$\det(C(\mathcal{B},\mathcal{E})) = \det\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right) \overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \det\left(v_1 \middle| v_2 - v_3 \middle| v_3 \right) \overset{C_3 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \det\left(v_1 \middle| v_2 - v_3 \middle| 2v_3 - v_2 \right) = 9$

$\Rightarrow \det(C(\mathcal{B},\mathcal{E})) \cdot \det([f]_{\mathcal{B}}) = 9 \cdot \det([f]_{\mathcal{B}}) = -9$

$\Rightarrow \det([f]_{\mathcal{B}}) = -1$

$\Rightarrow \boxed{\det(f^2) = \det([f]_{\mathcal{B}})^2 = 1}$

Bien

2.

a) Sean $B = (v_1, \dots, v_n)$, $B^* = (\phi_{v_1}, \dots, \phi_{v_n})$

B es ortonormal sii $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow$ $\phi_{v_j}(v_i) = \delta_{ij}$

y esto vale por la definición de base dual, ya que ϕ_{v_j} es el funcional lineal asociado a v_j.

b) Sea $g \in End_{\mathbb{C}}(V)$, $v \in V$

Dado $w \in V$,

$$\hat{g}(v)(w) = (\phi_v \circ g)(w) = \phi_v(g(w)) = \langle g(w), v \rangle \overset{*}{=}$$

Como V es de dimensión finita, y $g \in End_{\mathbb{C}}(V)$, $\exists\, g^* \in End_{\mathbb{C}}(V)$

* por prop de función adjunta

$$\overset{*}{=} \langle w, g^*(v) \rangle = \phi_{g^*(v)}(w)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{g}(v) = \phi_{g^*(v)}$$

3.- Sea f una simetría y sea $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal tal que f es simetría sobre $\langle v_1, v_2 \rangle$ y

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

(vemos que -1 es autovalor)

Sea $v = (2\ -1\ 2) = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$

$$f(v) = f(k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3) = k_1 v_1 + k_2 v_2 - k_3 v_3 = (0\ 3\ 0)$$
$$= v - 2 k_3 v_3$$

$\mathcal{B}$ ortonormal $\Rightarrow \|v_3\| = 1$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{(2\ -1\ 2) - (0\ 3\ 0)}{k_3} \Rightarrow v_3 \parallel (1\ -2\ 1) \Rightarrow v_3 = \frac{(1\ -2\ 1)}{\|(1\ -2\ 1)\|} = \frac{(1\ -2\ 1)}{\sqrt{6}}$$

Buscamos ahora v_1 y v_2 ortogonales

sea $v_1 = \frac{(1\ 1\ 1)}{\sqrt{3}} \Rightarrow \langle v_1, v_3 \rangle = 0$

$$v_2 \parallel v_1 \times v_3 = (-3\ 0\ 3) \Rightarrow v_2 = \frac{(1\ 0\ -1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left(\frac{(1\ 1\ 1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1\ 0\ -1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1\ -2\ 1)}{\sqrt{6}} \right)$$

$\Rightarrow f$ es una simetría sobre el plano $\left\langle \frac{(1\ 1\ 1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1\ 0\ -1)}{\sqrt{2}} \right\rangle$

falta chequear que cumple lo pedido.

4/4

4_ a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 2 & a & 0 \\ & & 2 & b \\ & & & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $\quad \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -3 & -1 \\ & \lambda-2 & -a & 0 \\ & & \lambda-2 & -b \\ & & & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda-2)^3 (\lambda-1)$

$\Rightarrow J_A$ va a tener forma $\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$ donde $J_1 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ y $J_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, por el grado de las raíces de χ_A

sabemos que $J_1 = (1)$ pero para ver la forma de J_2 necesitamos conocer $\dim(E_2) = \dim(Nu(2Id - A))$

$= n - rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ & 0 & -a & 0 \\ & & 0 & -b \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} n-3 = 1 & \text{si } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \\ n-2 = 2 & \text{si } a \neq 0 \vee b \neq 0 \\ n-1 = 3 & \text{si } a = 0 \wedge b = 0 \end{cases}$

Separamos en casos;

$\boxed{a \neq 0 \wedge b \neq 0}$

$\dim(E_2) = 1 \Rightarrow$ hay un bloque $\Rightarrow J_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{a \neq 0 \vee b \neq 0}$

$\dim(E_2) = 2 \Rightarrow$ hay dos bloques $\Rightarrow J_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{a = 0 \wedge b = 0}$

$\dim(E_2) = 3 \Rightarrow$ hay 3 bloques $\Rightarrow J_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

Faltaría chequear que cumple lo pedido. Bien

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$ $\quad J_A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^4 = \overset{\to \dim 1}{E_1} \oplus \overset{\to \dim 3}{E_2}$

por la multiplicidad de las raíces de χ_A

Observación:

$A \cdot e_1 = e_1 \Rightarrow e_1 \in E_1 \Rightarrow E_1 = \langle e_1 \rangle$

Nos falta buscar $E_2 = Nu(2I - A) = Nu \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 \\ & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Como J_2 tiene un bloque de tamaño ≥ 2, $\dim(Nu(2I-A)^2) = 1$

Seguimos los vectores canónicos para buscar los generadores del núcleo

$e_1 \xmapsto{f_{2I-A}} e_1$

$e_2 \mapsto -e_1 \mapsto -e_1$

$e_3 \mapsto -3e_1 - e_2 \mapsto -2e_1 \mapsto -2e_1$

$e_4 \mapsto -e_1 \mapsto -e_1$

$\Rightarrow$

$\qquad Nu(2I-A) \qquad Nu(2I-A)^2$

$0 \leftarrow\!\shortmid -e_1 - e_2 \leftarrow\!\shortmid e_3 + 2e_1$

$0 \leftarrow\!\shortmid e_4 + e_1$

$\Rightarrow E_2 = \langle e_3 + 2e_1, -e_1 - e_2, e_4 + e_1 \rangle$

Sea $\mathcal{B}$ la base de Jordan,

$$\boxed{\mathcal{B} = (e_1, e_3 + 2e_1, -e_1 - e_2, e_4 + e_1)}$$